

## Feuille TD 6

**Exercice 1.** Soient  $\varphi_1, \varphi_2: 0, 1 \rightarrow \mathbb{C}$  des lacets de classe  $C^1$  par morceaux tels que  $|\varphi_1(t)| < |\varphi_2(t)|$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Si  $0 \leq t \leq 1$ , on pose  $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ . Prouver que  $0 \notin \varphi_2^* \cup \varphi_1^*$  et que  $\text{ind}_\varphi(0) = \text{ind}_{\varphi_2}(0)$ .

**Exercice 2.** Pour  $t \in [0, 1]$ , on pose  $\Gamma(t) = \sqrt{2}e^{2\pi it}$  et

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 + i(8t - 1) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ 3 - 8t + i & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 + i(5 - 8t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 8t - 7 - i & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- (1) Vérifier que  $\gamma$  est un lacet de classe  $C^1$  par morceaux, et calculer  $\text{ind}_\gamma(0)$ .
- (2) Retrouver ce résultat en utilisant une homotopie dans  $\mathbb{C}^*$  de  $\gamma$  sur  $\Gamma$ .

**Exercice 3.** Soient  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert contenant  $\overline{\mathbb{D}} = \overline{D(0, 1)}$  et  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une application de classe  $C^1$  vérifiant  $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ . Si  $0 \leq s \leq 1$ , on définit des lacets  $\gamma_s$  et  $\Gamma_s$  en posant, pour  $0 \leq t \leq 1$  :

$$\gamma_s(t) = f(se^{2\pi it}) - se^{2\pi it}, \quad \Gamma_s(t) = sf(e^{2\pi it}) - e^{2\pi it}$$

On suppose que  $f(z) \neq z$  pour tout  $z \in \overline{\mathbb{D}}$ .

- (1) Pour  $s \in [0, 1]$ , déterminer  $\text{Ind}_{\gamma_s}(0)$  et  $\text{Ind}_{\Gamma_s}(0)$ .
- (2) En déduire une contradiction, et prouver ainsi que  $f$  a au moins un point fixe dans  $\overline{\mathbb{D}}$ .

**Exercice 4.** Soient  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert connexe et  $K \subset \Omega$  un compact. Soit  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans  $\Omega$  qui ne s'annule pas sur le bord orienté  $\Gamma$  de  $K$ .

- (1) Montrer que  $f$  n'a qu'un nombre fini des zéros  $p_1, \dots, p_n$  dans  $\overset{\circ}{K}$ .
- (2) Montrer que si  $n = 1$ , alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m_1,$$

où  $m_1 \geq 1$  est la multiplicité de  $p_1$  comme zéro de  $f$ .

- (3) Montrer qu'en général on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m_1 + \dots + m_n,$$

où  $m_1, \dots, m_n$  sont les multiplicités des zéros  $p_1, \dots, p_n$  de  $f$  dans  $\overset{\circ}{K}$ .